NUMEROS ENTEROS POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

Estándar: Pensamiento numérico

Criterio de desempeño: Resuelve ejercicios relacionados con potenciación y radicación de números enteros.

Posibles procesos a evaluar:

- Solución de problemas
- Comunicación
- Conexiones o relación de conceptos adquiridos
- Razonamiento lógico

Metodología:

- Lectura del tema
- Socialización de la información por parte del docente en el tablero
- Trabajo del taller por equipos
- Discusión
- Socialización de la discusión del trabajo en equipos (solución de dudas).
- Evaluación

DEFINICIONES:

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La potenciación es la operación que permite escribir de forma simplificada un producto de varios factores iguales.

Es decir: si $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-veces}} = a^n$$

En la expresión $a^n = b$, a se llama **base** e indica el factor que se repite en la multiplicación; n es el **exponente** e indica la cantidad de veces que se repite el factor, y b es la **potencia** y es el resultado de la multiplicación.

El signo de una potencia se determina de la siguiente forma:

- $a^n \in \mathbb{Z}^+$ *si* $a \in \mathbb{Z}^+$ *y* n *es par o impar*
- $a^n \in \mathbb{Z}^+$ *si* $a \in \mathbb{Z}^-$ *y* n *es par*
- $a^n \in \mathbb{Z}^-$ *si* $a \in \mathbb{Z}^-$ *y* n *es impar*

Ejemplos:

1. Escribir en forma de producto las siguientes potencias:

a. b^3 b. 8^2 c. $(-7)^3$

Solución

a. $b^3 = b \cdot b \cdot b$

b. $8^2 = 8 \times 8$

c. $(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7)$

2. Escribir en forma de potencia los siguientes productos y hallar los resultados.

a. $(-5) \times (-5) \times (-5)$

b. $(-3) \times (-3)$

c. $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

Solución

a. $(-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^3 = -125$

b. $(-3) \times (-3) = (-3)^2 = 9$

c. $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^4 = 16$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

- **Producto de potencias de igual base.** Para multiplicar dos o más potencias de igual base y diferente exponente, se deja la base y se suman los exponentes.

  En general, si $a \in \mathbb{Z}$ y $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

  Por ejemplo: $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$ y

  $5^3 \times 5^2 \times 5^4 = 5^{3+2+4} = 5^9$

- **Cociente de potencias de igual base.** Para dividir dos potencias de igual base y diferentes exponentes, se deja la base y se restan los exponentes.

  En general, si $a \in \mathbb{Z}$ y $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $a^n \div a^m = a^{n-m}$ con $a \neq 0$ y $n > m$.

  Por ejemplo: $\dfrac{(-6)^4}{(-6)^2} = (-6)^{4-2} = (-6)^2$

- **Potencia de una potencia.** Para resolver una potencia elevada a un exponente, se deja la base y se multiplican los exponentes.

  En general, si $a \in \mathbb{Z}$ y $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $(a^n)^m = a^{n \times m}$

  Por ejemplo: $(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6$ y $[(-11)^4]^6 = (-11)^{4\times 6} = (-11)^{24}$

- **Potencia de un producto**

  Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

  Por ejemplo: $(3 \times (-2))^3 = 3^3 \times (-2)^3$ y $[(-2) \times (-3)]^4 = (-2)^4 \times (-3)^4$

- **Potencia de un cociente**

  Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $(a \div b)^n = a^n \div b^n$

  Por ejemplo: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{3^3}{2^3}$ $\left[\dfrac{-9}{4}\right]^5 = \dfrac{(-9)^5}{4^5}$

Otras propiedades:

si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a^1 = a$.

si $a \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$ entonces $a^0 = 1$.

si $n \in \mathbb{N}$ entonces $1^n = 1$.

Ejemplo de aplicación de las propiedades

Simplificar los siguientes ejercicios

a. $(-2)^3 \times [3 \times (-2)]^2$

b. $\dfrac{[(-2)^3]^4 \times 4^4 \times [(-2)^3]^2 \times (4^3)^3}{(-2)^6 \times 4^7}$

Solución

a. $(-2)^3 \times [3 \times (-2)]^2 = (-2)^3 \times 3^2 \times (-2)^2$

$= (-2)^{3+2} \times 3^2 = (-2)^5 \times 3^2$

b. $\dfrac{[(-2)^3]^4 \times 4^4 \times [(-2)^3]^2 \times (4^3)^3}{(-2)^6 \times 4^7} = \dfrac{(-2)^{12} \times 4^4 \times (-2)^6 \times 4^9}{(-2)^6 \times 4^7}$

$= \dfrac{(-2)^{18} \times 4^{13}}{(-2)^6 \times 4^7} = (-2)^{12} \times 4^6$

RADICACION DE NUMEROS ENTEROS

La radicación es una operación inversa de la potenciación, ya que permite encontrar la base cuando se conoce el exponente y la potencia.

Si a, b $\in \mathbb{Z}$, *la raíz n-ésima de* a *se nota* $\sqrt[n]{a}$ = b si b^n = a.

En la expresión anterior, *b* recibe el nombre de raíz, *a* se llama radicando, el símbolo $\sqrt{\ }$ recibe el nombre de signo radical, *n* es el índice de la raíz y *a* recibe el nombre de radical.

Para calcular la raíz de un número entero, se deben tener en cuenta las siguientes reglas.

- $\sqrt[n]{a}$ tiene dos raíces que son dos números opuestos, si *n* es par y $a \in \mathbb{Z}^+$.

  Por ejemplo: $\sqrt{9} = \pm 3$ ya que $(3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$.

- $\sqrt[n]{a}$ no tiene raíces, si *n* es par y $a \in \mathbb{Z}^-$.

  Por ejemplo: $\sqrt[4]{-16}$ no tiene solución ya que no es posible encontrar un número entero que elevado a la cuatro dé como respuesta -16.

- $\sqrt[n]{a}$ tiene una sola raíz con el mismo signo del radicando, si *n* es impar y $a \in \mathbb{Z}$.

  Por ejemplo:

  $\sqrt[5]{-32} = -2$, pues $(-2)^5 = -32$ y

  $\sqrt[3]{27} = 3$, pues $(3)^3 = 27$

PROPIEDADES D ELA RADICACION

- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$

Ejemplo de aplicación de las propiedades

Calcular $\sqrt[2]{144}$.

Solución

Se descompone el radicando en factores primos y se aplican las propiedades de la radicación.

$\sqrt[2]{144} = \sqrt[2]{2^4 \times 3^2} = \sqrt[2]{2^4} \times \sqrt[2]{3^2} = 2^{\frac{4}{2}} \times 3^{\frac{2}{2}} = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$

TALLER DE CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS

A. POTENCIACION

1. Escribir los siguientes productos como potencias indicadas.

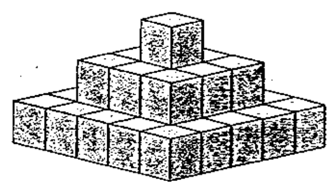
a. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
b. $(-8) \times (-8) \times (-8)$
c. $7 \times 7 \times 7 \times 7$
d. $(-4) \times (-4)$
e. 10
f. $(-1)(-1)(-1)$

2. Expresar como producto indicado y luego calcular cada potencia.

a. 3^2
b. 4^3
c. $(+3)^4$
d. $(+2)^5$
e. $(-9)^2$
f. $(-6)^4$
g. $(-1)^7$
h. $(-13)^2$
i. 0^9
j. $(1)^5$
k. $(-6)^1$
l. 5^1

3. Completar la expresión para calcular el número de cubos que forman la pirámide.

$1 + 3^{\square} + 5^{\square} = \square$



a. Si la base de la figura anterior es una de las caras de un cubo, ¿cuántos cubos pequeños hacen falta para completar el cubo más grande?

b. ¿Cuántos cubos pequeños se necesitan para construir un cubo, con 10 cubos en su arista?

4. Resolver cada par de potencias y luego comparar los resultados.

a. $(-3)^4$ y $(-4)^3$
b. 2^5 y 5^2
c. $(-1)^6$ y $(-6)^1$
d. 6^0 y 0^6
e. -2^4 y $(-2)^4$
f. 7^1 y 1^7
g. $(-3)^3$ y -3^3
h. $-(-3)^2$ y -3^2

5. Escribir una potencia indicada que refleje la siguiente situación. Luego, calcular la potencia. Juanita trajo de su viaje tres paquetes con 3 cajas cada uno, cada caja tiene 3 bolsas y cada bolsa, 2 lápices. ¿Cuántos lápices trajo Juanita de su viaje?

6. Aplicar las propiedades de la potenciación para simplificar las siguientes expresiones.

a. $\dfrac{(-5)^3 \times 4^6 \times (-5)^2}{4 \times (-5)^4}$

b. $\dfrac{(-3)^4 \times (-6)^5 \times (-9)^7}{(-3)^3 \times (-6)^4 \times (-9)^5}$

c. $\dfrac{[(-1)^3]^4 \times (+2^2)^3 \times [(-3)^4]^3}{(-1)^6 \times (2)^5 \times (-3)^{12}}$

d. $\dfrac{(4 \times 2)^3 \times (5^2)^6 \times 0^5}{2^2 \times 4 \times 5^{10}}$

B. RADICACIÓN

1. Escribir en cada cuadro el número que corresponda.

a. $\sqrt[3]{64} = \square$ porque $\square^3 = 64$

b. $\sqrt[7]{-1} = \square$ porque $\square^7 = (-1)$

c. $\sqrt[5]{\square} = -2$ porque $(-2)^5 = \square$

d. $\sqrt[3]{\square} = -3$ porque $(-3)^3 = \square$

e. $\sqrt[4]{16} = 2$ y -2 porque $2^{\square} = 16$ y $(-2)^{\square} = 16$

2. Escribir $>$, $<$ o $=$ entre cada par de raíces, según convenga.

a. $\sqrt{36} \;\square\; \sqrt[3]{8}$

b. $\sqrt[5]{-32} \;\square\; \sqrt[3]{-27}$

c. $\sqrt[7]{1} \;\square\; \sqrt[9]{1}$

d. $\sqrt[3]{-8} \;\square\; \sqrt[3]{-64}$

e. $\sqrt[5]{-32} \;\square\; -\sqrt{4}$

f. $\sqrt{9} \;\square\; \sqrt{36}$

g. $\sqrt{144} \;\square\; \sqrt[3]{-1.000}$

h. $\sqrt[7]{-1} \;\square\; -\sqrt{1}$

i. $\sqrt{0} \;\square\; \sqrt[3]{-343}$

j. $\sqrt{100} \;\square\; -\sqrt[3]{1.000}$

3. Completar el siguiente cuadro.

Potencia	Cantidad subradical	Índice raíz	Raíz indicada	Raíz
$4^3 = 64$				
	169	2		
			$\sqrt{25}$	
		3		-3
	36			6 y -6
		5	$\sqrt[5]{-32}$	

4. Calcular las siguientes raíces.

a. $\sqrt{36}$

b. $\sqrt[3]{-8}$

c. $\sqrt[4]{16}$

d. $\sqrt[8]{1}$

e. $\sqrt{0}$

f. $\sqrt[5]{-32}$

g. $\sqrt{144}$

h. $\sqrt[3]{-27}$

i. $\sqrt{169}$

j. $\sqrt{25}$

k. $\sqrt{49}$

l. $\sqrt[6]{64}$

m. $\sqrt[5]{243}$

n. $\sqrt[3]{-1.000}$

o. $\sqrt{324}$

5. Completar.

Producto	Potencia indicada	Base	Exponente	Potencia
				-125
	$(-2)^6$			
	$(-3)^5$			
			2	64
		6		36
	$(-1)^7$			
	7			

6. Completar la siguiente tabla.

Operación	Aplicando propiedades	Sin aplicar propiedades
$2^3 \times 2^0 \times 2$	$2^{3+0+1} = 2^4 = 16$	$8 \times 1 \times 2 = 16$
$(-3)^0 \times (-3)^2 \times (-3)$		
$(2^3)^4$		
$\dfrac{(-7)^3}{(-7)^2}$		
$[(-4) \times 2]^3$		
$[(-8)^2]^0$		
$[(-1)^2 \times 2^2]^4$		

Educador: Juan Carlos Duarte Giraldo
Institución: Presbítero Luís Rodolfo Gómez
Bibliografía: Aritmética y geometría Santillana,