LÓGICA PROPOSICIONAL
Estándar: Numérico-Numérico
Logro: Utiliza en forma excelente los conocimientos básicos de lógica matemática.

DEFINICIONES
Proposiciones: son expresiones del lenguaje que pueden calificarse como falsas o verdaderas.
Ejemplos:

- Carlos es hermano de María.
- 39 es un número primo.
- Colón descubrió América.
- El rombo es un cuadrilátero.

Proposición simple: es aquella que se forma sin utilizar términos de enlace.

Valor de verdad de una proposición simple

Toda proposición simple se puede calificar como verdadera o **falsa; por** ejemplo, la proposición *La Luna es un planeta* es una proposición falsa; **mientras** que la proposición 4 *y* 25 *son cuadrados perfectos* es una proposición **verdadera**.

Ejemplo:

Determinar el valor de verdad de cada proposición simple.

a. 5 es divisor de 15.
b. Bogotá es la capital de Colombia.
c. 30 es múltiplo de 7.
d. $\sqrt{4}$ es un número irracional

Solución

a. 1, 3 y 5 son divisores de 15 es una proposición verdadera.
b. Bogotá es la capital de Colombia es una proposición verdadera.
c. 30 es múltiplo de 7 es una proposición falsa.
d. $\sqrt{4}$ es un número irracional es una proposición falsa.

Nota:

Las proposiciones simples se representan mediante letras minúsculas, por ejemplo, las letras *p, q, r, s*, entre otras, pueden representar las proposiciones planteadas anteriormente, así:

p: 5 es divisor de 15.

q: Bogotá es la capital de Colombia.

r: 30 es múltiplo de 7.

s: $\sqrt{4}$ es un número irracional.

Proposiciones Compuestas y Conectivos Lógicos: las proposiciones compuestas son aquellas que están constituidas por dos o más proposiciones simples, unidas por partículas de enlace llamados conectivos lógicos.
Nota:

Los conectivos lógicos son: *y, o, si... entonces..., ...si y sólo si..., no*; y se representan con los símbolos indicados a la izquierda.

Conectivos lógicos:

Conectivo lógico	Símbolo
y	$\wedge$
o	$\vee$
si... entonces...	$\Rightarrow$
...si y sólo si...	$\Leftrightarrow$
no	$\sim$

Ejemplo:

Escribir el conectivo lógico que se utiliza en cada proposición compuesta.

a. Este lápiz es mío y este borrador también.
b. Ese rosal no tiene rosas.
c. Salgo a pasear o termino mi tarea.
d. Veremos la película, si y sólo si consigo las entradas.
e. Si 17 es mayor que 13, entonces, 13 es menor que 17.

Solución

a. El conectivo lógico es "y".
b. El conectivo lógico es "no".
c. El conectivo lógico es "o".
d. El conectivo lógico es "...si y sólo si...".
e. El conectivo lógico es "si... entonces...".

Negación de una proposición: La negación es el conectivo lógico que permite cambiar el valor de verdad de una proposición. Así, si la proposición p tiene valor de verdad verdadero, entonces la proposición ~p tiene valor de verdad falso.

p	~p
V	F
F	V

Ejemplo:
Negar las siguientes proposiciones y escribir el valor de verdad de la negación.

p: Todo número entero es racional.
q: Un número racional es entero y natural.
r: Todo número irracional es real.
s: Los números racionales tienen expresión decimal periódica.

Solución

~*p*: Algún número entero no es racional. Su valor de verdad es falso.
~*q*: Para todo número racional el número no es entero o no es natural. Su valor de verdad es verdadero.
~*r*: Algún número irracional no es real. Su valor de verdad es falso.
~*s*: Los números racionales no tienen expresión decimal periódica. Su valor de verdad es falsa.

Conjunción

Al enlazar dos o más proposiciones simples mediante el conectivo *y* se obtiene una tercera proposición compuesta llamada **conjunción**.

Ejemplo:

Formar una conjunción con cada par de proposiciones simples.

a. p: 21 es divisible entre 3.
   q: 3 es número impar.

b. r: El oso es mamífero.
   s: El oso es molusco.

Solución

a. $p \wedge q$: 21 es divisible entre 3 y 3 es impar.

b. $r \wedge s$: El oso es mamífero y molusco.

Disyunción

La disyunción es una proposición compuesta formada por dos o más proposiciones simples relacionadas con el conectivo *o*.

Ejemplo:

Formar una disyunción con cada par de proposiciones simples.

a. p: Los insectos son artrópodos.
   q: Los pájaros son aves.

b. r: Cali es la capital del Valle.
   s: Tolú está en la costa pacífica.

Solución

a. $p \vee q$: Los insectos son artrópodos o los pájaros son aves.

b. $r \vee s$: Cali es la capital del Valle o Tolú está en la costa pacífica.

Implicación o condicional

Una proposición compuesta es condicional cuando las proposiciones que la forman están relacionadas con el conectivo lógico si... entonces..., llamado implicación.

En este caso, la primera proposición se llama antecedente y la segunda proposición se llama consecuente.

Ejemplo:

Formar una implicación con cada par de proposiciones simples.

a. p: 12 es un número par.
   q: 12 es divisible entre 2.

b. r: La mosca es un insecto.
   s: La mosca nada en el agua.

Solución

a. $p \Rightarrow q$: Si 12 es un número par, entonces, es divisible entre 2.
   $p \Rightarrow q$ se lee si p entonces q.

b. $r \Rightarrow s$: Si la mosca es un insecto, entonces, nada en el agua.
   $r \Rightarrow s$ se lee si r entonces s.

Equivalencia o bicondicional

Una proposición compuesta es bicondicional cuando cada proposición simple implica a la otra. Dichas proposiciones están relacionadas con el conectivo lógico ...si y sólo si..., llamado equivalencia.

Ejemplo:

Formar una equivalencia con cada par de proposiciones simples.

a. p: San Andrés es una isla.
   q: San Andrés está rodeada de agua.

b. r: 3 es número primo.
   s: 3 es múltiplo de 2.

Solución

a. $p \Leftrightarrow q$: San Andrés es una isla, si y sólo si, está rodeada de agua.
   $p \Leftrightarrow q$ se lee p si y sólo si q.

b. $r \Leftrightarrow s$: 3 es número primo, si y sólo si, es múltiplo de 2.
   $r \Leftrightarrow s$ se lee r si y sólo si s.

Valores de verdad de cada conectivo lógico

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Condicional

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tablas de verdad: Las tablas de verdad se usan para encontrar el valor de verdad de proposiciones compuestas.

Ejemplo:

Hallar el valor de verdad de cada proposición compuesta

a. $(p \Rightarrow q) \vee \sim(p \wedge q)$

b. $[\sim(p \wedge q) \vee q] \Rightarrow p$

Solución

a. Para encontrar el valor de verdad de la proposición compuesta se construye la siguiente tabla de verdad.

En cada columna de la tabla se escribe el valor de verdad de las proposiciones $p \Rightarrow q$, $p \wedge q$, $\sim(p \wedge q)$, $(p \Rightarrow q) \vee \sim(p \wedge q)$ respectivamente. Así,

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q)$	$(p \Rightarrow q) \vee \sim(p \wedge q)$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

Estas y otras proposiciones compuestas se llaman **fórmulas lógicas** y pueden ser tautologías, cuando todos los resultados son verdaderos; y contradicciones, cuando son falsas en todas sus interpretaciones.

b. Se plantea la siguiente tabla.

p	q	$(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q) \vee q$	$[\sim(p \wedge q) \vee q] \Rightarrow p$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F

Taller de conocimientos y competencias

1. Determinar el valor de verdad de cada proposición simple.

a. Los divisores de un número son mayores que él.

b. Uno de los casos de factorización se llama diferencia de cuadrados.

c. En un triángulo equilátero la suma de sus ángulos internos es menor que 180°.

d. Un ángulo cóncavo es aquel que mide más de 90° y menos de 180°.

e. Colombia ha tenido 30 presidentes.

f. La diferencia entre los números naturales es una operación conmutativa.

g. Para calcular el área de un cuadrado es necesario saber el valor del lado.

h. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pertenece al conjunto de los números racionales.

2. Escribir una proposición que forme una conjunción verdadera con la proposición dada.

a. Los números 1, 2, 4, 6, 12 son divisores del número 12.

b. La raíz cuadrada de 121 es 11.

c. El valor de x en $x^2 - 1 = 0$ es 1.

d. Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.

e. La diagonal de un cuadrado lo divide en dos triángulos isósceles.

3. Asignar letras a cada proposición simple. Luego, simbolizar toda la proposición compuesta.

a. Si 15 es múltiplo de 5, entonces, la multiplicación de 5 y 3 es 15.

b. Si $a = 5$, entonces, $a^3 = 125$.

c. 3 es múltiplo de 6 ó 3 es divisor de 6.

d. Si l_1 es paralela a l_2, entonces l_2 es paralela a l_1.

e. Si $\overline{AB}$ es congruente a $\overline{CD}$ y $\overline{CD}$ es congruente a $\overline{EF}$, entonces $\overline{AB}$ es congruente a $\overline{EF}$.

4. Completar las tablas de verdad

Luego, determinar a partir de la última columna si la proposición es tautología o contradicción.

a.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow p$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

b.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

c.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

d.

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)$	$[(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)] \Leftrightarrow r$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

5. Escribir si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar la respuesta.

a. La proposición $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \vee \sim q)$ es una tautología.

b. La tabla de verdad de la proposición $\sim p \Leftrightarrow \sim[(q \wedge r) \Rightarrow r]$ tiene los valores V F V F V F V F, respectivamente.

c. La proposición $p \Rightarrow (r \vee s)$ es verdadera cuando p es falsa, r es falsa y s es verdadera.