CONJUNTOS

Estándar: Numérico-numérico

Logro: usa las operaciones entre conjuntos y las aplica a la cotidianidad

Posibles procesos a evaluar:

- Solución de problemas
- Comunicación
- Conexiones o relación de conceptos adquiridos
- Razonamiento lógico

Metodología:

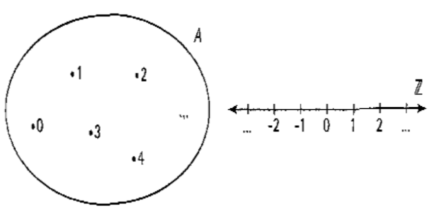
- Lectura del tema
- Socialización de la información por parte del docente en el tablero
- Trabajo del taller por equipos
- Discusión
- Socialización de la discusión del trabajo en equipos (solución de dudas).
- Evaluación.

DEFINICIONES

Conjunto: Un conjunto es una colección de objetos. Cada objeto del conjunto se llama elemento.

Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas y se pueden representar por medio de diagramas o encerrando sus elementos entre llaves.

Diagrama de Venn | Diagrama lineal | Entre llaves



$P = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$

Ejemplos

Representar los siguientes conjuntos en un diagrama de Venn, en un diagrama lineal y entre llaves.

a. El conjunto de los números primos.

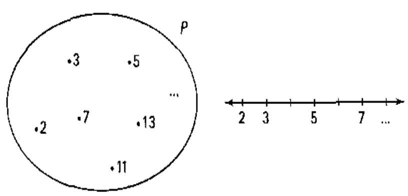
b. El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.

c. El conjunto de los números enteros mayores de -2, menores que 4.

Solución

a. El conjunto de los números primos.

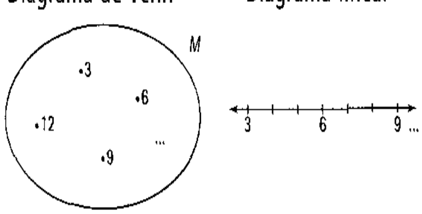
Diagrama de Venn | Diagrama lineal | Entre llaves



$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$

b. El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.

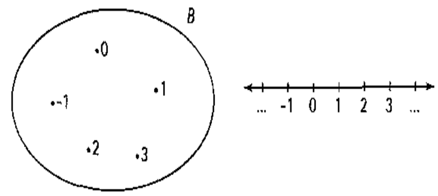
Diagrama de Venn | Diagrama lineal | Entre llaves



$M = \{3, 6, 9, 12, ...\}$

c. El conjunto de los números enteros mayores de -2, menores que 4.

Diagrama de Venn | Diagrama lineal | Entre llaves



$B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

Determinación de un conjunto: Un conjunto se puede determinar por extensión y por comprensión.

Extensión: Un conjunto se determina por extensión cuando se nombra uno a uno todos sus elementos.

Por ejemplo, el conjunto de los números dígitos se determina por extensión así:

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Comprensión: Un conjunto se determina por comprensión cuando se recurre a una propiedad que caracteriza sus elementos.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares menores que 7 se determina por comprensión así:

$P = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es par} \wedge x < 7\}$

Ejemplos:

Determinar por extensión y por comprensión cada uno de los siguientes conjuntos.

a. El conjunto de los números naturales impares mayores que 5 y menores que 16.

b. El conjunto de los divisores de 8.

c. El conjunto de los números naturales entre 6 y 8.

Solución

a. Por extensión: $I = \{7, 9, 11, 13, 15\}$.

Por comprensión: $I = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es impar} \wedge 5 < x < 16\}$

b. Por extensión: $D = \{1, 2, 4, 8\}$.

Por comprensión: $D = \{x \,/\, x \text{ es divisor de } 8\}$

c. Por extensión: $M = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \,/\, 6 < x < 8\}$.

Por comprensión: $M = \{7\}$

Relación de pertenencia: Se dice que un elemento pertenece a un conjunto si cumple con la o las características que definen el conjunto. El símbolo $\in$ se utiliza para representar esta relación.

Así, si x cumple con las características del conjunto M, se escribe:

$x \in M$ y se lee "x pertenece a M".

Si x no cumple con las características del conjunto M, se escribe:

$x \notin M$ y se lee "x no pertenece a M".

Por ejemplo, si $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, P es el conjunto de los números pares e I es el conjunto de los números impares, se cumple que $2 \in \mathbb{N}$, $2 \in P$, $3 \notin P$, $5 \in I$, $8 \notin I$, entre otros.

RELACIÓN ENTRE CONJUNTOS

Relación de contenencia: Un conjunto A está contenido o incluido en otro conjunto B si todos los elementos del conjunto A también pertenecen al conjunto B. Se simboliza.

$A \subset B$ *y se lee* "A *está contenido en* B".

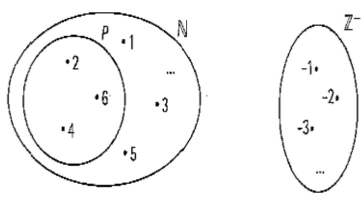
De la misma manera, si el conjunto B contiene al conjunto A, se simboliza $B \supset A$ y se lee B contiene a A.

Cuando por lo menos un elemento del conjunto A no pertenece al conjunto B, se dirá que A no está contenido, o no está incluido en B, se simboliza

$A \not\subset B$ y se lee "A no está contenido en B"

Ejemplos:

Observar el diagrama de Venn. Luego, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.



a. $P \subset \mathbb{Z}^-$

b. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^-$

c. $P \subset \mathbb{N}$

d. $\mathbb{Z}^- \not\subset \mathbb{N}$

Solución

a. $P \subset \mathbb{Z}^-$ es falso pues ningún elemento de P está en $\mathbb{Z}^-$.

b. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^-$ es falso pues $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z}^-$ es el conjunto de los números enteros negativos.

c. $P \subset \mathbb{N}$ es verdadero pues todos los elementos de P son también elementos de $\mathbb{N}$.

d. $\mathbb{Z}^- \not\subset \mathbb{N}$ es verdadero, pues ningún elemento del conjunto $\mathbb{Z}^-$ es de $\mathbb{N}$.

Relación de igualdad: Dos conjuntos A y B son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.

En símbolos, $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

$A = B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

Es decir, todo elemento que pertenece a A, también pertenece a B y todo elemento de B, también pertenece a A.

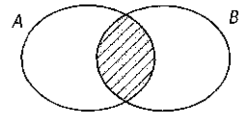
El orden en que aparezcan los elementos en un conjunto, no interfiere en su definición.

Por ejemplo, el conjunto S de los dígitos y el conjunto T de los números naturales menores o iguales que 9 y el 0 son iguales, pues

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $S = T$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Intersección entre conjuntos:



$A \cap B$

Dados dos conjuntos A *y* B*, la intersección de* A *con* B *es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a* A *y a* B *a la vez.*

La intersección de conjuntos se nota por $A \cap B$ *y se lee:*

A *intersección* B.

Simbólicamente,

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplos:

Sean $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{0, 6, 9, 3\}$; $C = \{5, 7, 9\}$. Hallar y representar en un diagrama de Venn.

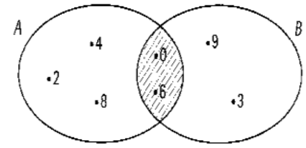
a. $A \cap B$

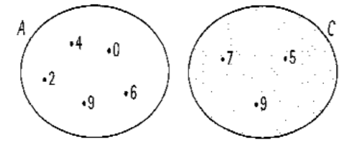
b. $A \cap C$

Solución

a. $A \cap B = \{0, 6\}$

b. $A \cap C = \phi$



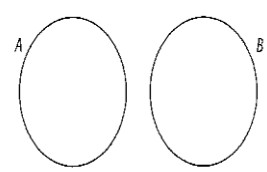


Nota: Dos conjuntos son disyuntos cuando su intersección es vacía.

A continuación se puede observar las representaciones gráficas de la intersección de dos conjuntos a partir de la relación que existe entre ellos.

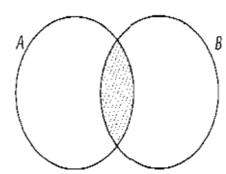
La parte coloreada corresponde a la intersección.

disyuntos



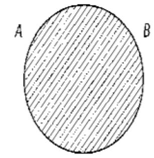
$A \cap B = \phi$

intersecantes



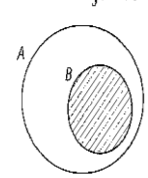
$A \cap B$

iguales



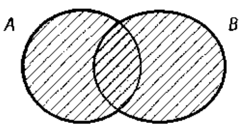
$A \cap B$

subconjunto



$A \cap B$

Unión entre conjuntos



$A \cup B$

Dados dos conjuntos A *y* B, *la unión de* A *con* B *es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a* A *o a* B.

La unión de conjuntos se denota por $A \cup B$ *y se lee:* A *unión* B.

Simbólicamente,

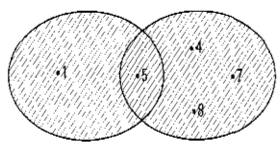
$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplos:

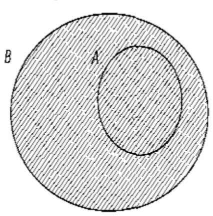
Sean $A = \{1, 5\}$ y $B = \{4, 5, 7, 8\}$, hallar la unión entre A y B y representarla en un diagrama de Venn.

Solución

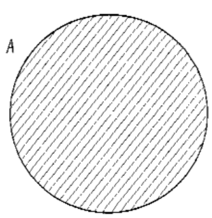
$A \cup B = \{1, 5, 4, 7, 8\}$



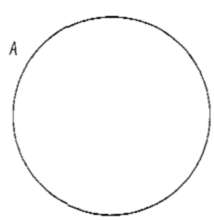
Los casos especiales de la unión entre conjuntos se observan en los siguientes diagramas.



$A \subset B, A \cup B = B$



$A \cup A = A$



$A \cup \phi = A$

<u>Propiedades de la unión y la intersección</u>

Se ha definido la unión y la intersección entre dos conjuntos, pero en la práctica es corriente trabajar con más de dos conjuntos y tener que calcular expresiones como la siguiente:

$$A \cup [(B \cap C) \cup D]$$

Para trabajar con este tipo de expresiones resulta necesario estudiar las siguientes propiedades.

1° Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

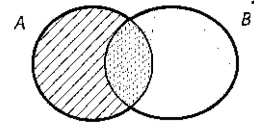
2° Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

3° Absorción: $A \cup (B \cap A) = A$
$A \cap (B \cup A) = A$

4° Distributiva: De la unión con respecto a la intersección
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De la intersección con respecto a la unión.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Diferencia entre conjuntos:



$A - B$

Dados dos conjuntos A *y* B *se llama diferencia entre* A *y* B *al conjunto formado por los elementos que pertenecen a* A *y no pertenecen a* B.

La diferencia entre conjuntos se nota $A - B$ *y se lee* A *menos* B.

Simbólicamente,

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

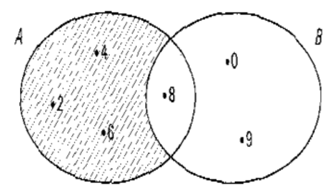
Ejemplos:

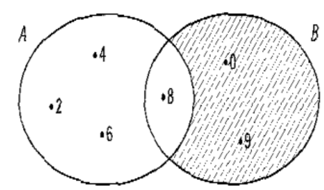
Si $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{0, 8, 9\}$, hallar $A - B$, $B - A$. Luego, representar las respuestas en un diagrama de Venn.

Solución

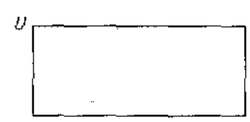
$A - B = \{2, 4, 6\}$

$B - A = \{0, 9\}$





Conjunto referencial:



El conjunto referencial o universal es el conjunto formado por todos los elementos del tema de referencia.

El conjunto referencial se simboliza con U y se representa gráficamente en un rectángulo.

Por ejemplo, al hablar del conjunto de los números pares, se puede fijar como conjunto referencial el conjunto de los números naturales.

Complemento de un conjunto:

Dado el conjunto A *referido a un conjunto universal* U, *el complemento de* A *es el conjunto formado por los elementos de* U *que no están en* A.

El complemento se denota A^C *o* A' *y se lee* A *complemento.*

Simbólicamente,

$$A^C = U - A = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$$

Ejemplo:

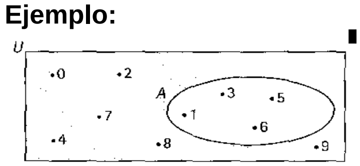


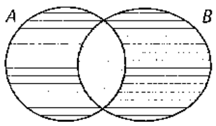
Figura 1

Si $U = \{x \,/\, x$ es un número dígito$\}$ y $A = \{1, 3, 5, 6\}$, hallar A^c y representarlo en un diagrama de Venn.

Solución

$A^c = \{0, 2, 4, 7, 8, 9\}$. La representación de A^c se muestra en la figura 1.

Diferencia simétrica:



$A \triangle B$

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A *y* B *está formada por los elementos que pertenecen a* $A \cup B$ *y no pertenecen a* $A \cap B$.

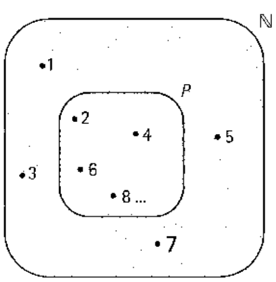
Se nota $A \triangle B$ *y se lee* A *diferencia simétrica* B.

Simbólicamente,

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Ejemplos:

a.



$\mathbb{P} \triangle \mathbb{N} = \mathbb{I}$

$\mathrm{I} = \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ x \text{ impar}\}$

Figura 2

Dados los conjuntos $P = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x$ par$\}$ y $\mathbb{N}$, hallar $P \triangle \mathbb{N}$.

Solución

$P \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ y $P \cap \mathbb{N} = P$, luego, los elementos que pertenecen a la unión entre P y $\mathbb{N}$ y no pertenecen a la intersección, están en el conjunto $I = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x$ impar$\}$.

Así, $P \triangle \mathbb{N} = I$

La representación de estos conjuntos se observa en la figura 2.

b.

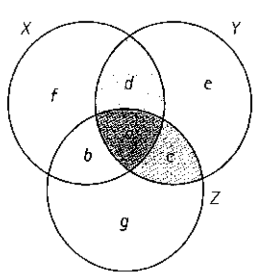


Figura 3

En una ciudad hay tres periódicos: "Digolaverdad", "Losétodo" y "Elchisme". El 35% de los habitantes de la ciudad lee "Digolaverdad", el 40% lee "Losétodo"; el 13% lee "Digolaverdad" y "Losétodo", el 16% lee "Losétodo" y "El chisme", el 15% lee "Digolaverdad" y "Elchisme"; el 7% lee los tres periódicos y el 75% lee "Losétodo" o "Elchisme".

Encontrar el porcentaje de habitantes que no lee ninguno de los tres periódicos.

Solución

1º Se elabora un diagrama y se asigna una letra a cada una de las regiones, así como X al periódico "Digolaverdad"; Y al periódico "Losétodo" y Z al periódico "Elchisme" (figura 3).

2º El porcentaje de personas que leen los tres periódicos es $a = 7\%$.

3º Se calcula:

$a + d = 13\%$; luego $d = 6\%$

$a + c = 16\%$; luego $c = 9\%$

$a + b = 15\%$; luego $b = 8\%$

4º Los habitantes que leen X representan el 35%, entonces, $a + b + d + f = 35\%$ de donde $f = 14\%$.

5º Los habitantes que leen Y representan el 40%, entonces, $a + d + c + e = 40\%$ de donde $e = 18\%$. Como $a + b + c + d + e + g = 75\%$, entonces $g = 27\%$.

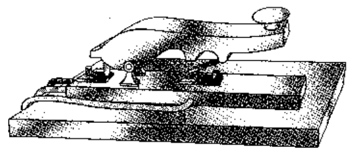
6º Finalmente, $a + b + c + d + e + f + g = 89\%$. Luego, el porcentaje de los habitantes que no lee ningún periódico es $100\% - 89\% = 11\%$.

TALLER

1. TECNOLOGÍA. El alfabeto Morse es un sistema telegráfico que se compone por señales de dos duraciones: puntos y rayas. Fue desarrollado por Samuel Finley Breese Morse en 1838.

   El alfabeto Morse se emplea en telegrafía en forma de señales acústicas y ópticas.

   Esquema de un telégrafo Morse



   A continuación se muestra el alfabeto y frente a él, su signo en clave Morse.

Letra	Signo
a	•—
b	—•••
c	—•—•
ch	————
d	—••
e	•
f	••—•
g	——•
h	••••
i	••
j	•———
k	—•—
l	•—••
m	——
n	—•

Letra	Signo
ñ	——•——
o	———
p	•——•
q	——•—
r	•—•
s	•••
t	—
u	••—
v	•••—
w	•——
x	—••—
y	—•——
z	——••
á	•——•—
ü	••——

   Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

   a. $M = \{x \,/\, x$ es una letra cuyo signo se compone únicamente de puntos$\}$

   b. $N = \{x \,/\, x$ es una letra cuyo signo tiene solamente rayas$\}$

   c. $S = \{x \,/\, x$ es una letra cuyo signo tiene una cantidad impar de líneas$\}$

   d. $T = \{x \,/\, x$ es una letra cuyo signo tiene más puntos que líneas$\}$

   Realizar un diagrama de Venn e indicar los elementos correspondientes a las operaciones entre los conjuntos anteriores.

   e. $M \cap N$ h. $S \cap T$ k. $(N \cup S) \cap T$

   f. $M \cap T$ i. $T \cup N$ l. $(N \cup M) \cap T$

   g. $M \cup N$ j. $(T \cup N) \cap S$ m. $(T \cap M) \cup S$

2. Determinar por extensión cada conjunto. Luego, indicar los elementos que pertenecen a cada operación.

$R = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, 5 < x < 10\}$

$P = \{x \,/\, x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 4\}$

$O = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$

$Q = \{x \,/\, x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 8\}$

a. $R \cap P$ f. $(P \cup Q) \cap R$

b. $P \cup O$ g. $(R \cup O) \cap Q$

c. $Q \cup R$ h. $(Q \cup P) \cap O$

d. $Q \cap R$ i. $(P \cup Q) \cup R$

e. $P \cup Q$ j. $(R \cap Q) \cap O$

3. Leer y responder

Determinar por extensión los conjuntos que están determinados por comprensión. Luego, hallar los elementos que pertenecen a cada operación.

$A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x < 12, x \text{ es primo}\}$

$B = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x < 10, x \text{ es par}\}$

$C = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x < 15, x \text{ es impar}\}$.

a. $A - B$ d. $C - A$

b. $A - C$ e. $C - B$

c $B - A$ f. $B - C$

4. Dados los conjuntos

$M = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x < 10\}$

$N = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, 2 < x < 12\}$

a. Utilizar M y N para comprobar que $(M \cup N) - (M \cap N) = (M - N) \cup (N - M)$.

b. Realizar un diagrama de Venn para representar $(M \cup N) - (M \cap N)$.

c. Representar $(M - N) \cup (N - M)$ en un diagrama de Venn.

5. Dado el conjunto

$U = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, 2 \leq x < 30, x \text{ es par}\}$

y los conjuntos:

$T = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x \text{ es par} \wedge x \text{ es primo}\}$

$S = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x < 12, x \text{ es par}\}$

$R = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x > 6, x \text{ es par}\}$

Hallar:

a. T' g. $T \cap S$ m. $T - S$

b. R' h. $(T \cap S)'$ n. $(T - S)'$

c. $T \cup S$ i. $S \cup R$ o. $(R - S)$

d. $(T \cup S)'$ j. $(S \cup R)'$ p. $(R - S)'$

e. $T \cap R$ k. $S \cap R$ q. $(S \triangle R)'$

f. $(T \cap R)'$ l. $(S \cap R)'$ r. $(R \triangle T)'$

6. En un bus van las personas representadas en el conjunto B.

$$B = \{m, t, p, q, l, f, g, h, i, j, b\}$$

sabiendo que:

t, q, l son hombres.

g, h son mujeres.

m es un vendedor ambulante.

p, q, l son profesionales.

p, q es una pareja de esposos cuyos hijos son b y j de diferente sexo.

t, j son estudiantes.

f, g, h, i son dos matrimonios obreros de una empresa.

Indicar quiénes son:

a. Los hombres.

b. Los ingenieros.

c. Los hombres obreros.

d. Las mujeres obreras.

e. La mujer que estudia.

7. Un grupo de 700 mujeres realiza trabajos manuales. Para ello utilizan tres tipos de materiales: madera, cerámica e hilo. Se sabe que todas utilizan cerámica, 400 utilizan madera y 500 utilizan hilo. ¿Cuántas mujeres emplean los tres materiales?

8. Entre un grupo de personas se realizó una encuesta acerca de su gusto por la gaseosa, el jugo o la cerveza y se obtuvieron los siguientes datos.

El 25% toma gaseosa, el 55% toma jugo, el 12% toma gaseosa y jugo, el 17% toma jugo y cerveza, el 13% toma gaseosa y cerveza; el 9% toma las tres bebidas y el 80% toma gaseosa o cerveza.

Elaborar un diagrama que describa la situación.

Bibliografía: Santillana. Aritmética y Geometría, Matemáticas, Serie de Formación Integral.
Educador: Juan Carlos Duarte Giraldo
Institución: Presbítero Luís Rodolfo Gómez